حمیدرضا امیری

آموزش ترجمهٔ متون ریاضی

اثبات یک اتحاد

مثال ۱. تبدیل به سینوس و کسینوس برای اثبات یک اتحاد

درستی اتحاد $\sin x \times \cot x \times \sec x = ۱$ را اثبات کنید.

حل: سمت چپ اتحاد از سمت راست پیچیده‌تر است. ما سعی می‌کنیم از طریق بازنویسی سمت چپ برحسب سینوس و کسینوس، اتحاد را اثبات کنیم:

$$\sin x.\cot x.\sec x$$
$$= \sin x \times \frac{\cos x}{\sin x} \times \frac{۱}{\cos x}$$
$$= \frac{\sin x.\cos x}{\sin x.\cos x} = ۱$$

سمت چپ معادله را طوری بازنویسی کردیم که با سمت راست یکسان شد. بنابراین این معادله یک اتحاد است.

مثال ۲. استفاده از اتحاد فیثاغورث برای اثبات یک اتحاد

اتحاد $۱ - ۲\sin^۲ x = ۲\cos^۲ x - ۱$ را اثبات کنید.

حل: سمت راست معادله را بازنویسی می‌کنیم:

$$۲\cos^۲ x - ۱ = ۲(۱ - \sin^۲ x) - ۱$$
$$= ۲ - ۲\sin^۲ x - ۱$$
$$= ۱ - ۲\sin^۲ x$$

مثال ۳. فاکتورگیری برای اثبات یک اتحاد

اتحاد $\csc^۲ x - \cos^۲ x.\csc^۲ x = ۱$ را اثبات کنید.

حل: سمت چپ معادله را ساده می‌کنیم:

$$\left(\csc^۲ x = \frac{۱}{\sin^۲ x}\right)$$
$$\csc^۲ x - \cos^۲ x.\csc^۲ x = \csc^۲ x(۱ - \cos^۲ x)$$
$$= \csc^۲ x.\sin^۲ x$$
$$= \frac{۱}{\sin^۲ x}.\sin^۲ x = ۱$$

مثال ۴. ضرب کردن در یک مزدوج برای اثبات یک اتحاد

اتحاد $\frac{\sin x}{۱ + \cos x} = \frac{۱ - \cos x}{\sin x}$ را اثبات کنید.

حل: صورت و مخرج سمت چپ اتحاد را در مزدوج $۱ + \cos x$، یعنی $۱ - \cos x$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{\sin x}{۱ + \cos x} = \frac{\sin x}{۱ + \cos x} \times \frac{۱ - \cos x}{۱ - \cos x}$$
$$= \frac{\sin x(۱ - \cos x)}{۱ - \cos^۲ x}$$
$$= \frac{\sin x(۱ - \cos x)}{\sin^۲ x}$$
$$= \frac{۱ - \cos x}{\sin x}$$

لغت‌ها و اصطلاحات مهم

1. Sin x	سینوس x
2. Sec x	سکانت x
3. Csc x	کُسکانت x
4. Verify	نشان دادن، ثابت کردن
5. Identity	اتحاد
6. Solution	حل، پاسخ
7. Complicate	پیچیده
8. Rewriting	بازنویسی
9. Involve	شامل
10. Identical	همانند، یکسان، مساوی
11. Equation	معادله
12. Pythagorean	فیثاغورثی
13. Factor	عامل ضرب
14. Simplify	ساده کردن

EXAMPLE 1 Change to Sines and Cosines to Verify an Identity.

Verify the identity $\sin x \cot x \sec x = 1$.

Solution

The left side of the identity is more complicated than the right side. We will try to verify the identiy by rewriting the left side so that it involves only sines and cosines.

$$\sin x \cot x \sec x = \sin x . \frac{\cos x}{\sin x} . \frac{1}{\cos x}$$

$$= \frac{\cancel{\sin x}\ \cancel{\cos x}}{\cancel{\sin x}\ \cancel{\cos x}}$$

$$= 1$$

we have rewritten the left side of the equation so that it is identical to the right side.Thus we have verified that the equation is an identity.

EXAMPLE 2 Use a Pythagorean Identity t Verify an Identity.

Verify the identity $1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$.

Solution

Rewrite the right side of the equation.

$$2\cos^2 x - 1 = 2(1 - \sin^2 x) - 1$$

$$= 2 - 2\sin^2 x - 1$$

$$= 1 - 2\sin^2 x$$

EXAMPLE 3

Factor to Verify an Identity

Verify the identity

$$\csc^2 x - \cos^2 x \csc^2 x = 1.$$

Solution

Simplify the left side of the equation.

$$\csc^2 x - \cos^2 x \csc^2 x = \csc^2 x(1 - \cos^2 x)$$

$$= \csc^2 x \sin^2 x$$

$$= \frac{1}{\sin^2 x} . \sin^2 x = 1 \qquad \bullet \csc^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

EXAMPLE 4 Multiply by a Conjugate to Verify an Identity

Verify the identity $\frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$.

Solution

Multiply the numerator and denominator of the left side of the identity by the conjugate of $1 + \cos x$, which is $1 - \cos x$.

$$\frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} . \frac{1 - \cos x}{1 - \cos x}$$

$$= \frac{\sin x(1 - \cos x)}{1 - \cos^2 x}$$

$$= \frac{\sin x(1 - \cos x)}{\sin^2 x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$$

شما ترجمه کنید:

Verify the identity $\frac{\sin x + \tan x}{1 + \cos x} = \tan x.$

Solution

The left side of the identity is more complicated than right side. we will try to verify the identity by rewriting the left side so that it involves only sines and cosines.

$$\frac{\sin x + \tan x}{1 + \cos x} =$$

$$\frac{\sin x + \frac{\sin x}{\cos x}}{1 + \cos x} - \frac{\frac{\sin x \cos x}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x}}{1 + \cos x}$$

$$= \frac{\frac{\sin x \cos x + \sin x}{\cos x}}{1 + \cos x} = \frac{\sin x \cos x + \sin x}{\cos x} \div \frac{1 + \cos x}{1}$$

$$= \frac{\sin x \cos x + \sin x}{\cos x} . \frac{1}{1 + \cos x} - \frac{\sin x(\cos x + 1)}{\cos x} . \frac{1}{1 + \cos x}$$

$$= \frac{\sin x(\cancel{1 + \cos x})}{\cos x} . \frac{1}{\cancel{1 + \cos x}} = \frac{\sin x}{\cos x} - \tan x$$

we have rewriten the left side of the equation so that it is identical to the right side. Thus we have verified that the equation is an identity.

In Exercises 1 to 56, verify each identity.

1. $\tan x \csc x \cos x = 1$
2. $\tan x \sec x \sin x = \tan^2 x$
3. $\frac{4\sin^2 x - 1}{2\sin x + 1} = 2\sin x - 1$
4. $\frac{\sin^2 x - 2\sin x + 1}{\sin x - 1} = \sin x - 1$
5. $(\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x) = 1 - 2\cos^2 x$
6. $(\tan x)(1 - \cot x) = \tan x - 1$
7. $\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\cos x} = \frac{\cos x - \sin x}{\sin x \cos x}$
8. $\frac{1}{\sin x} + \frac{3}{\cos x} = \frac{\cos x + 3\sin x}{\sin x \cos x}$
9. $\frac{\cos x}{1 - \sin x} = \sec x + \tan x$